

Exercice I-25 : Désintégrations nucléaires

Les désintégrations nucléaires sont écrites de façon simplifiée et la résolution des questions n'exige pas de connaissances particulières sur ces désintégrations.

L'activité d'une quantité donnée de nucléide est le nombre de désintégrations spontanées que présente cette quantité par seconde. Pour des raisons historiques cette activité se mesure en Curie (Ci). Un Ci correspond à $3,7000 \times 10^{10}$ désintégrations par seconde.

Le radium 226 se désintègre selon l'acte élémentaire :

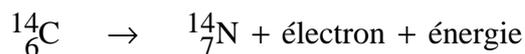


La constante de vitesse de cette réaction est : $k = 1,355 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$.

La masse molaire du radium 226 est $226,025 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Le nombre d'Avogadro est $N = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

- 1- Que représente le symbole ${}^A_Z\text{X}$?
- 2- Soit $P(t)$ la population d'un échantillon de Radium 226 à la date t et P_0 la population à la date $t=0$. Cette population évolue suivant la loi : $P = P_0 \cdot \exp(-k \cdot t)$ Etablir cette expression de la loi d'évolution.
- 3- Evaluer l'activité d'un gramme de radium 226 en Curie. Quelle est la période T_{Ra} (ou demi-vie) du radium 226 ? On rappelle que la période est la durée au bout de laquelle la population initiale a été divisée par deux et $\exp(x) \approx 1 + x$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- 4- Selon vous quelle raison historique est à l'origine de l'unité Curie ?
- 5- Le carbone 14 (${}^{14}\text{C}$) se décompose en azote 14 selon :

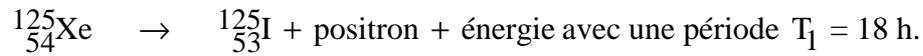


avec une période T_{C} de 5730 ans. Sa masse molaire est de $14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

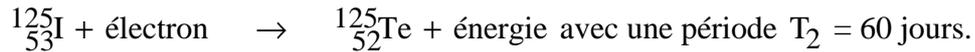
- a- Quelle est l'activité en Curie d'un gramme de carbone 14 ?
- b- Présenter en quelques lignes une « utilisation » du carbone 14 dans un domaine scientifique distinct de la chimie.

Désintégrations nucléaires

- 6- L'iode 125 ($^{125}_{53}\text{I}$) est obtenu à partir de Xénon 125 selon l'acte élémentaire suivant :



L'iode 125 se décompose en tellure 125 ($^{125}_{52}\text{Te}$) par capture d'un électron par le noyau (capture électronique). L'acte élémentaire est le suivant :



- a-* Dans le passage du xénon 125 au tellure 125, peut-on appliquer l'approximation de l'état quasi-stationnaire (AEQS) à l'iode 125 ? Justifier votre réponse.
- b-* On dispose, à la date $t = 0$, d'un échantillon contenant uniquement une quantité N_0 de $^{125}_{54}\text{Xe}$. A l'aide d'approximations « grossières », établir à partir de quelle date t et pour quelle durée d l'échantillon renfermera au moins 90% d'iode 125.

Correction

- 1- Le symbole A_ZX représente un atome de numéro atomique Z , (nombre de protons du noyau = nombre d'électrons car l'atome est électriquement neutre) et de masse atomique A , représentant le nombre de nucléons (nombre de protons + nombre de neutrons du noyau).
- 2- La désintégration du radium étant un acte élémentaire unimoléculaire, on en déduit que l'ordre, égal à la molécularité est de 1, soit :

$$-\frac{d[\text{Ra}]}{dt} = k \cdot [\text{Ra}] \text{ soit } [\text{Ra}] = [\text{Ra}]_0 \cdot \exp(-k \cdot t)$$

La population P d'un échantillon de Radium 226, étant proportionnel à la concentration, on en déduit alors l'expression de la loi d'évolution :

$$P = P_0 \cdot \exp(-k \cdot t)$$

- 3- Un gramme de radium 226 représente une population initiale P_0 :

$$P_0 = \frac{m}{M} \times N = \frac{1}{226,025} \times 6,022 \cdot 10^{23} = 2,664 \cdot 10^{21} \text{ molécules}$$

En une seconde, la population P restante est de :

$$P = P_0 \cdot \exp(-1,355 \times 10^{-11} \times 1)$$

soit un nombre de désintégrations

$$A = P_0 \cdot [1 - \exp(-k)] \approx P_0 \times k = 2,664 \cdot 10^{21} \times 1,355 \times 10^{-11} = 3,610 \cdot 10^{10}$$

soit en Curie :

$$A = 0,976 \text{ Ci}$$

On montre que la période T_{Ra} (ou demie-vie) du radium 226 est pour un acte élémentaire unimoléculaire :

$$T_{\text{Ra}} = \frac{\ln 2}{k} \text{ car } \frac{P_0}{2} = P_0 \cdot \exp(-k \cdot T_{\text{Ra}})$$

$$\text{soit } T_{\text{Ra}} = 5,115 \cdot 10^{10} \text{ s} = 1,421 \cdot 10^7 \text{ h} = 5,921 \cdot 10^5 \text{ jours} = 1621 \text{ ans}$$

Désintégrations nucléaires

4- Pierre et Marie Curie ont tous deux travaillé sur la radioactivité du radium, d'où le Curie, unité de désintégrations comme le Becquerel (initiateur des travaux) est l'unité qui représente le nombre de désintégration par seconde.

5a- Le carbone 14 (^{14}C) se décompose en azote 14 selon un acte élémentaire unimoléculaire avec une période T_C de 5730 ans. Sa constante de vitesse est donc :

$$k = \frac{\ln 2}{T_{Ca}} = \frac{\ln 2}{5730 \times 365,25 \times 24 \times 3600} = 3,833 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

soit un nombre de désintégrations

$$A = P_0 \cdot [1 - \exp(-k)] \approx P_0 \times k = \frac{1}{14,0} \times 6,022 \cdot 10^{23} \times 3,833 \times 10^{-12} = 1,649 \cdot 10^{11} \text{ Bq}$$

soit en Curie : $A = 4,456 \text{ Ci}$

5b- La radioactivité du carbone 14 est appliquée à la datation des objets organiques possédant notamment du carbone. Le nombre de carbone 14 ayant varié au fil des millénaires, en fonction du rayonnement cosmique, cette méthode peut conduire à une certaine incertitude sur la date. Il a été nécessaire de corriger la population en carbone 14 au fil du temps (carotte polaire) et de corrélérer avec d'autres méthodes de datation, dendromètres ou décompte du nombre de cernes dans les arbres par exemple.

6a- L'approximation des états quasi stationnaires peut s'appliquer à un intermédiaire de réaction, lorsque celui-ci est formé au cours d'une ou plusieurs étapes cinétiquement lentes et consommés au cours d'une ou plusieurs étapes cinétiquement rapides. Sa concentration est alors très faible devant la concentration des réactifs ou produits et sa variation de concentration globale par rapport au temps est quasi-nulle sauf à $t = 0$. L'iode 125 est obtenu à partir de Xénon 125 selon un acte élémentaire dont la période T_1 est de 18 h alors qu'il se décompose en tellure 125 selon un acte élémentaire dont la période T_2 est de 60 jours. On en déduit donc, les actes élémentaires étant unimoléculaires que la constante de la réaction de formation de l'iode,

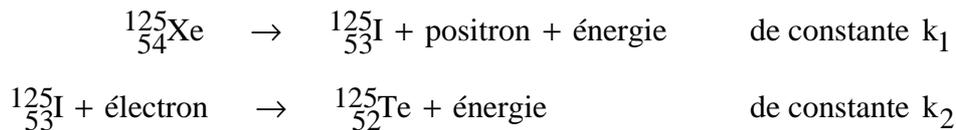
$$k_1 = \frac{\ln 2}{T_1} = 1,070 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \text{ est nettement plus grande que celle de la réaction de décomposition,}$$

Désintégrations nucléaires

$$k_2 = \frac{\ln 2}{T_2} = 1,337 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}. \text{ Il n'est donc pas possible d'appliquer l'AEQS à l'iode puisqu'il est}$$

formé dans une étape rapide et consommé dans une étape lente.

6b- On a deux réactions successives :



On a donc :

$$-\frac{dN_{\text{Xe}}}{dt} = k_1 \cdot N_{\text{Xe}} \quad \text{soit } N_{\text{Xe}} = N_0 \cdot \exp(-k_1 \cdot t)$$

$$\frac{dN_{\text{I}}}{dt} = k_1 \cdot N_{\text{Xe}} + k_2 \cdot N_{\text{I}}$$

$$\text{ou } \frac{dN_{\text{I}}}{dt} + k_2 \cdot N_{\text{I}} = k_1 \cdot N_0 \cdot \exp(-k_1 \cdot t)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du 1^{er} ordre avec 2nd membre exponentiel. Cette E.D. s'intègre selon la méthode de la solution particulière en :

$$N_{\text{I}}^{\text{homogène}} = \lambda \cdot \exp(-k_2 \cdot t)$$

pour la solution de l'équation différentielle sans 2nd membre

avec une solution particulière du type :

$$N_{\text{I}}^{\text{particulière}} = \mu \cdot \exp(-k_1 \cdot t)$$

$$\text{soit } (-k_1 \cdot \mu + k_2 \cdot \mu) \cdot \exp(-k_1 \cdot t) = k_1 \cdot N_0 \cdot \exp(-k_1 \cdot t)$$

$$\text{soit } \mu = \frac{k_1 \cdot N_0}{-k_1 + k_2}$$

La solution générale, somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre et de la solution particulière est :

$$N_{\text{I}} = \lambda \cdot \exp(-k_2 \cdot t) + \frac{k_1 \cdot N_0}{-k_1 + k_2} \cdot \exp(-k_1 \cdot t)$$

$$\text{avec comme condition initiale : } N_{\text{I}}(t = 0) = 0$$

Désintégrations nucléaires

$$\text{on obtient } \lambda = - \frac{k_1 \cdot N_0}{-k_1 + k_2}$$

$$\text{soit } N_I = \frac{k_1 \cdot N_0}{-k_1 + k_2} [-\exp(-k_2 \cdot t) + \exp(-k_1 \cdot t)]$$

En supposant que k_2 est négligeable devant k_1 , et $\exp(-k_2 \cdot t) \approx 1$ on a :

$$N_I \approx \frac{k_1 \cdot N_0}{-k_1} [-1 + \exp(-k_1 \cdot t)] \approx N_0 \cdot [1 - \exp(-k_1 \cdot t)]$$

Pour déterminer à partir de quelle date t :

$$N_I > 0,9 \times N_0$$

$$\text{soit } [1 - \exp(-k_1 \cdot t)] > 0,9$$

$$\text{d'où } t > - \frac{\ln(0,1)}{k_1} = 2,152 \cdot 10^5 \text{ s} = 59,8 \text{ h}$$

On suppose « grossièrement » que le nombre d'atomes d'iode passe par un maximum proche de N_0 au bout de 60 h. Il y a alors décroissance de la quantité d'iode selon une loi exponentielle en $N_0 \cdot \exp(-k_2 \cdot t)$. A un instant $\tau = t + d$, la quantité d'iode est à nouveau de $N_I = 0,9 \times N_0$, soit :

$$0,9 \times N_0 = N_0 \cdot \exp[-k_2 \cdot (t + d)]$$

$$\text{soit } \tau \approx - \frac{\ln 0,9}{k_2} = 7,880 \cdot 10^5 \text{ s} = 219 \text{ h}$$

soit une durée d de 159 h